

МУНИЦИПАЛЬНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«СРЕДНЯЯ ШКОЛА № 3 Г. ВОЛЖСКОГО ВОЛГОГРАДСКОЙ ОБЛАСТИ»  
(МОУ СШ № 3)

УТВЕРЖДЕНО  
приказом директора  
МОУ СШ № 3  
от 31.08.2017 № 64/9



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

элективного курса

**Замечательные неравенства, их обоснование и применение**

Для 10а класса

Составлено на 2017 - 2018 учебный год

Учитель составитель Савченко Ирина Владимировна

Программа: автор С.А. Гомонов

Название "Замечательные неравенства, их обоснование и применение." Элективные курсы в профильном обучении: образовательная область «Математика»/ Министерство образования РФ - Национальный фонд подготовки кадров.

Издательство: М.: Вита-Пресс

Год: 2014

## Пояснительная записка

Предлагаемый курс «Замечательные неравенства, их обоснование и применение» предусматривает намеченные, но совершенно не проработанные в основном курсе школьной математике, вопросы. Он дополняет базовую программу по математике, позволяя учащимся пройти путь от способов доказательств несложных числовых неравенств, до обоснования «замечательных» неравенств Коши – Буняковского, Чебышева и др.

Неравенства играют фундаментальную роль в большинстве разделов современной математики, без них не может обойтись ни физика, ни математическая статистика, ни экономика.

Данный курс имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся, использует межпредметные связи.

Материал предлагаемого курса даст возможность показать учащимся как красоту и совершенство, так и сложность, и изобретательность математических методов, порожденных не только алгеброй и математическим анализом, но и геометрией, и даже физикой.

Материал курса делится на два блока. В первом блоке излагаются наиболее распространенные приемы сравнения действительных чисел и установления истинности неравенств с переменной, а второй блок дает учащимся представление о применении неравенств при решении оптимизационных задач. Работа учащихся по этой программе предполагает их выход либо на первый уровень – ознакомление с основными методами и приемами получения и применения замечательных неравенств, либо на второй уровень, предполагающий усиление самостоятельной работы (в том числе и с дополнительными источниками) под руководством учителя, решение более сложных задач. Таким образом, материал может применяться для различных групп учащихся.

Программа рассчитана на 34 часа. При проведении занятий на первое место должны выйти такие организационные формы работы, как дискуссия («Какое доказательство лучше», «Многообразие метода подстановки» и т. д.), выступления с докладами (в частности, с отчетными докладами по результатам индивидуального домашнего задания, по результатам написания рефератов и др.) или содокладами, дополняющими выступление учителя или ученика. Возможны и разные формы индивидуальной или групповой деятельности учащихся, например отчетные доклады по результатам самостоятельных «поисков» изучаемых вопросов на страницах сайтов в Интернете, книг, журналов.

Формой итогового контроля в зависимости от уровня усвоения изучаемого материала от уровня усвоения изучаемого материала может стать: решение учеником индивидуального домашнего задания, требовавшего проведения небольшого самостоятельного математического исследования; написание реферата на предложенные учителем темы.

**Цель курса:** изучение избранных классов неравенств с переменными и научное обоснование (в той степени строгости, которая соответствует уровню школьной математики) методов их получения, а так же выход на приложения изученного теоретического материала.

**Задачи курса:**

- рассмотреть примеры на установление истинности числовых неравенств, встречающихся на экзаменах
- познакомить с основными методами решения задач на установление истинности неравенств с переменными;
- рассмотреть метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств;
- рассмотреть неравенство Коши для произвольного числа переменных и неравенство Коши – Буняковского и их применение к решению задач;
- дать представление о математике как общекультурной ценности на примерах применения неравенства в математической статистике, экономике, задач на оптимизацию;
- развивать навыки организации умственного труда и самообразования.

**Требования к уровню подготовки учащихся.**

В результате изучения курса учащиеся должны знать:

- понятие «больше», «меньше», «не больше», «не меньше» для действительных чисел и их свойства;
- основные методы сравнения двух чисел: «по определению», сравнение их отношений с единицей, сравнение их степеней, сравнение их с промежуточным числом, метод использования «замечательных неравенств»;
- основные методы установления истинности неравенств с переменными: метод анализа, метод синтеза, метод «от противного», метод использования тождеств, метод подстановки (введение новых переменных), метод оценивания (усиление и ослабления);
- схему применения метода математической индукции;
- неравенство Коши для произвольного числа переменных;
- соотношение Коши - Буняковского;
- средние арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратическое двух положительных чисел, их геометрическое интерпретация.

В результате изучения курса учащиеся должны уметь:

- применять основные методы сравнения двух чисел;
- применять основные способы доказательства истинности неравенств с переменными;
- применять метод математической индукции для доказательства неравенств;
- применять неравенство Коши - Буняковского при  $n = 2$  и  $n = 3$ ;
- применять замечательные неравенства для нахождения наибольшего и наименьшего значений функций, решения несложных задач на оптимизацию.

## Содержание курса

### Часть I. Замечательные неравенства.

**Тема I.** Числовые неравенства и их свойства. Основные методы установления истинности числовых неравенств.

Понятие положительного, отрицательного числа, число ноль. Основные законы сложения и умножения действительных чисел. Свойства суммы и произведения положительных чисел. Понятие «больше», его геометрическая интерпретация. Понятие «меньше», «не больше» и «не меньше» для действительных чисел и их свойства. Числовые неравенства. Сравнение двух чисел по «определению», путем сравнения их отношения с единицей, путем сравнения их степеней, путем сравнения их с промежуточными числами, метод введения вспомогательной функции.

**Тема II.** Неравенства с переменными. Основные методы решения задач на установление истинности неравенств с переменными. Частные случаи неравенство Коши.

Неравенства с переменными. Неравенство – следствие, равносильное неравенство. Методы установления истинности неравенств с переменными: метод анализа, метод синтеза, метод «от противного», метод подстановки, метод оценивания (усиление или ослабление), метод использования тождества.

**Тема III.** Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств. Неравенство Коши для произвольного числа переменных.

Индукция вообще и в математике в частности. Схема применения метода математической индукции. Некоторые модификации метода математической индукции, примеры. Неравенство Коши для произвольного числа переменных.

**Тема IV.** Неравенство Коши - Буняковского и его применение к решению задач.

Теорема, устанавливающая соотношение Коши – Буняковского, геометрическая интерпретация этого неравенства. Векторный вариант его записи для  $n = 2$ .

### Часть II. Средние величины, их свойства и применение.

**Тема V.** Средние величины: в школьном курсе математике, физике. Средние арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратическое и соотношения между ними в случае двух и более параметров. Геометрическая интерпретация. Четыре средние линии трапеции.

**Тема VI.** Применение неравенств.

Неравенства в финансовой математике. Задачи на оптимизацию. Поиск наибольших и наименьших значений функций с помощью замечательных неравенств.

## Перечень учебно-методических средств обучения:

### Литература для учащихся.

1. Гомонов С.А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения. М.: Дрофа, 2005.
2. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2002.
3. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по решению математических задач. М.: Просвещение, 1984.
4. Дорофеев Г.В. и др. Пособие по математике для поступающих в вузы. М.: Наука, 1976.
5. Математика: Большой справочник для школьников. М.: Дрофа, 1998.

### Литература для учителя.

1. Седрамян Н.М., Авоян А.М. Неравенства. Методы доказательства. М.: Физматлит, 2002.
2. Петров В.А. Прикладные задачи на уроках математике. Смоленск: Изд-во СГПИУ, 2001.
3. Монахов В.М. и др. Методы оптимизации. Применение математических методов в экономике: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1978.
- 4.

### Статьи журнала «Математика в школе».

5. Петров В.А. Элементы финансовой математики на уроке. № 8, 2002.
6. Вороной А.Н. Пять способов доказательства одного неравенства. № 4, 2000
7. Ярский. А.С. Как научить доказывать неравенства. № 1, 1997
8. Курляндчик Л.Д. Неравенство Коши. № 5, 1987.
9. Гальперин И.М., Габович И.Г. Использование векторного неравенства Коши-Буняковского при решении задач по алгебре. № 2, 1991.
10. Далингер В.А. Как сделать теорему о среднем арифметическом и средним геометрическим средством познания. № 9, 2003
11. Фирстова Н.И. Решение некоторых видов уравнений при помощи неравенств. № 1, 2002
12. Дорофеев Г.В. и др. Геометрические доказательства теоремы о средних: Курс по выбору «Избранные вопросы математики». № 10, 2003.

### Статьи в приложении к газете «Первое сентября». «Математика»

13. Клостер Г. Метод математической индукции. № 23, 2003
  14. Винокуровы Е. и Н. Экономика в задачах. № 34, 1998
  15. Башарин Г.П. Элементы финансовой математики. № 16, 1996
- Автонова Н, Солодовников С. Неравенство Коши о средних арифметическом и геометрическом. № 20, 1999.

**Календарно - тематический план элективного курса  
"Замечательные неравенства, их обоснование и применение."**

№ занятия	Тема	Кол. час.	Тип занятия	Элементы содержания	Требования к уровню подготовки	Вид контроля	Дата проведения
<b>Часть I. Замечательные неравенства</b>							
1	Числовые неравенства и их свойства.	1	Семинар	Числовые неравенства и их свойства.	- знать понятия «большее» и «меньшее» для действительных чисел, понятие строгого и нестрогого неравенства и простейшие его свойства - уметь применять свойства при решении задач	СР	
2	Основные методы установления истинности числовых неравенств.	1	Практическое занятие	Основные методы установления истинности числовых неравенств	- знать понятия «большее» и «меньшее» для действительных чисел, понятие строгого и нестрогого неравенства и простейшие его свойства - уметь применять свойства при решении задач	СР тест	
3	Основные методы установления истинности числовых неравенств.	1	Семинар	Основные методы установления истинности числовых неравенств	- знать понятия «большее» и «меньшее» для действительных чисел, понятие строгого и нестрогого неравенства и простейшие его свойства - уметь применять свойства при решении задач	СР	
4	Основные методы решения задач на установление истинности числовых неравенств с переменными.	1	Семинар	Основные методы решения задач на установление истинности числовых неравенств с переменными.	- уметь применять свойства при решении задач	СР тест	
5	Частные случаи неравенства Коши, их обоснование и применение.	1	лекция	Частные случаи неравенства Коши, их обоснование и применение.	- знать правила сравнения чисел и уметь применять их при решении конкретных задач, - знать определение возрастающей и убывающей функции, - уметь применять свойства монотонности при сравнении чисел	СР	
6	Частные случаи неравенства Коши, их обоснование и применение.	1	Семинар	Частные случаи неравенства Коши, их обоснование и применение.	- уметь применять свойства монотонности при сравнении чисел	СР	
7	Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств.	1	лекция	Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств.	- знать определение понятия неравенства с переменными, его решения и не решения, равносильных неравенств, области определения неравенства, - уметь иллюстрировать эти понятия примерами.	СР	

8	Метод индукции и его применение к неравенств.	Метод индукции и его применение к доказательству неравенств.	Семинар	1	Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств.	Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств.	тест	<ul style="list-style-type: none"> <li>- уметь применять свойства монотонности при сравнении чисел</li> <li>- знать определение понятия неравенства с переменными, его решения и не решения, равносильных неравенств, области определения неравенства,</li> <li>- умение иллюстрировать эти понятия примерами.</li> </ul>
9	Неравенство Коши для произвольного переменных	Неравенство Коши для произвольного числа переменных	Семинар	1	Неравенство Коши для произвольного числа переменных	Неравенство Коши для произвольного числа переменных	СР	<ul style="list-style-type: none"> <li>- уметь применять свойства монотонности при сравнении чисел</li> <li>- знать определение понятия неравенства с переменными, его решения и не решения, равносильных неравенств, области определения неравенства,</li> <li>- умение иллюстрировать эти понятия примерами.</li> </ul>
10	Неравенство Коши для произвольного переменных	Неравенство Коши для произвольного числа переменных	семинар	1	Неравенство Коши для произвольного числа переменных	Неравенство Коши для произвольного числа переменных	тест	<ul style="list-style-type: none"> <li>- знать метод перебора всех вариантов при доказательстве равенств с переменными и уметь его применять.</li> <li>- знать аксиому математической индукции и неравенство Коши.</li> </ul>
11	Неравенство Буяковского и его применение к решению задач	Неравенство Коши-Буяковского и его применение к решению задач	Семинар	1	Неравенство Коши-Буяковского и его применение к решению задач	Неравенство Коши-Буяковского и его применение к решению задач	СР тест	<ul style="list-style-type: none"> <li>- знать метод перебора всех вариантов при доказательстве равенств с переменными и уметь его применять.</li> <li>- знать аксиому математической индукции и неравенство Коши.</li> <li>- уметь использовать принципы математической индукции и неравенство Коши при решении задач</li> <li>- знать неравенство Коши-Буяковского.</li> <li>- уметь применить его при решении задач.</li> </ul>
12	Неравенство Буяковского и его применение к решению задач	Неравенство Коши-Буяковского и его применение к решению задач	семинар	1	Неравенство Коши-Буяковского и его применение к решению задач	Неравенство Коши-Буяковского и его применение к решению задач	СР	<ul style="list-style-type: none"> <li>- знать метод перебора всех вариантов при доказательстве равенств с переменными и уметь его применять.</li> <li>- знать аксиому математической индукции и неравенство Коши.</li> <li>- уметь использовать принципы математической индукции и неравенство Коши при решении задач</li> <li>- знать неравенство Коши-Буяковского.</li> <li>- уметь применить его при решении задач.</li> </ul>
13	Неравенства подсказывают методы их обоснования	Неравенства подсказывают методы их обоснования	Семинар	1	Неравенства подсказывают методы их обоснования	Неравенства подсказывают методы их обоснования	СР тест	<ul style="list-style-type: none"> <li>- иметь представление о методах доказательства неравенств с переменными.</li> <li>- знать определение симметрической функции и самосимметричного неравенства,</li> <li>- уметь использовать эти свойства при доказательстве неравенств</li> </ul>

Часть 2. Средние величины и соотношения между ними

14	Средние величины: соотношения между ними. Степенные соотношения	1	лекция	Средние величины: степенные соотношения между ними.	- знать определение средних величин: среднее арифметическое, геометрическое, гармоническое, квадратическое и симметрическое в случае двух и большего числа параметров и соотношения между ними. - уметь находить средние величины по алгоритму	СР
15	Среднее арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратическое в случае двух параметров.	1	семинар	Среднее арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратическое в случае двух параметров.	- знать определение средних величин: среднее арифметическое, геометрическое, гармоническое, квадратическое и симметрическое в случае двух и большего числа параметров и соотношения между ними. - уметь находить средние величины по алгоритму	СР
16	Среднее арифметическое, геометрическое Гаусса и среднее арифметико-гармоническое	1	семинар	Среднее арифметико-геометрическое Гаусса и среднее арифметико-гармоническое	- знать определение средних величин: среднее арифметическое, геометрическое, гармоническое, квадратическое и симметрическое в случае двух и большего числа параметров и соотношения между ними. - уметь находить средние величины по алгоритму	СР
17	Симметрические средние. Круговые неравенства.	1	лекция	Симметрические средние. Круговые неравенства.	- знать определение средних величин: среднее арифметическое, геометрическое, гармоническое, квадратическое и симметрическое в случае двух и большего числа параметров и соотношения между ними. - уметь находить средние величины по алгоритму	СР тест
18	Среднее арифметическое взвешенное и его свойства	1	семинар	Среднее арифметическое взвешенное и его свойства	- знать определение средних величин по алгоритму - уметь находить средние величины по алгоритму	СР
19	Средние степенные и средние взвешенные степенные	1	семинар	Среднее арифметическое взвешенное и его свойства	- знать определение средних величин: среднее арифметическое, геометрическое, гармоническое, квадратическое и симметрическое в случае двух и большего числа параметров и соотношения между ними. - уметь находить средние величины по алгоритму	СР
20	Неравенство Чебышева и некоторые его обобщения: простейший его вариант и его обобщение.	1	лекция	Неравенство Чебышева и некоторые его обобщения: простейший его вариант и его обобщение.	- уметь находить средние величины по алгоритму - знать неравенство Чебышева. - уметь применить его при решении задач. - уметь работать с научной и исторической литературой. - уметь составлять сообщение о жизни и научной деятельности учёного	СР



21	Неравенства, обобщающие как неравенство Чебышева, так и неравенство Коши-Буняковского.	1	семинар	Неравенство Чебышева и некоторые его обобщения: простейший его паритет и его обобщение.	- знать неравенство Чебышева, - уметь применить его при решении задач, - уметь работать с научной и исторической литературой, - уметь составлять сообщения о жизни и научной деятельности учёного	СР
22	Генераторы замечательных неравенств	1	семинар	Генераторы замечательных неравенств	-знать и уметь использовать свойства линейной и квадратичной функции для решения неравенств, -знать неравенство треугольника и, теорему косинусов и определённый интеграл и уметь их использовать для обоснования и получения неравенств,	СР
23	Свойства квадратичной функции; геометрические модели.	1	семинар	Свойства квадратичной функции; геометрические модели.	-знать и уметь использовать свойства линейной и квадратичной функции для решения неравенств, -знать неравенство треугольника и, теорему косинусов и определённый интеграл и уметь их использовать для обоснования и получения неравенств,	СР
24	Свойства одномонотонных последовательностей.	1	семинар	Свойства одномонотонных последовательностей.	-знать и уметь использовать свойства линейной и квадратичной функции для решения неравенств, -знать неравенство треугольника и, теорему косинусов и определённый интеграл и уметь их использовать для обоснования и получения неравенств.	СР тест
25	Свойства одномонотонных последовательностей – источник замечательных неравенств.	1	Практическо е занятие	Свойства одномонотонных последовательностей – источник замечательных неравенств.	- знать о применённых замечательных неравенства в теоретических и прикладных исследованиях,	СР
26	Свойства одномонотонных последовательностей – источник замечательных неравенств.	1	семинар	Свойства одномонотонных последовательностей – источник замечательных неравенств.	- знать о применённых замечательных неравенств в теоретических и прикладных исследованиях,	СР тест
27	Неравенство Иенсона - исследование функции на выпуклость и вогнутость средствами математического анализа.	1	семинар	Неравенство Иенсона - исследование функции на выпуклость и вогнутость средствами математического анализа.	- знать о применённых замечательных неравенств в теоретических и прикладных исследованиях,	СР

28	Неравенство Иенсона - исследование функции на выпуклость и вогнутость средствами математического анализа.	1	семинар	Неравенство Иенсона - исследование функции на выпуклость и вогнутость средствами математического анализа.	- знать о примененных замечательных неравенствах в теоретических и прикладных исследованиях, - исследование функции на выпуклость и вогнутость средствами математического анализа.	СР	
29	Неравенство Коши-Гельдера и Минковского	1	семинар	Неравенство Коши-Гельдера и Минковского	- знать о примененных замечательных неравенствах в теоретических и прикладных исследованиях.	СР тест	
30	Неравенство Коши-Гельдера и Минковского	1	семинар	Неравенство Коши-Гельдера и Минковского	- знать о примененных замечательных неравенствах в теоретических и прикладных исследованиях.	СР	
31	Применение неравенств. Неравенства в математической статистике и экономике	1 1	семинар	Применение неравенств. Неравенства в математической статистике и экономике	- знать о примененных замечательных неравенствах в теоретических и прикладных исследованиях, -знать алгоритмы нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, - уметь находить наибольшее и наименьшее значение функции.	СР тест	
32	Задачи на оптимизацию.	1	семинар	Задачи на оптимизацию.	- знать о примененных замечательных неравенствах в теоретических и прикладных исследованиях, -знать алгоритмы нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, - уметь находить наибольшее и наименьшее значение функции.	СР	
33	Поиск наибольших и наименьших значений функций с помощью замечательных неравенств.	1	семинар	Поиск наибольших и наименьших значений функций с помощью замечательных неравенств.	- знать о примененных замечательных неравенствах в теоретических и прикладных исследованиях, -знать алгоритмы нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, - уметь находить наибольшее и наименьшее значение функции.	СР	
34	Обобщающее повторение.	1	семинар	Поиск наибольших и наименьших значений функций с помощью замечательных неравенств.	- знать о примененных замечательных неравенствах в теоретических и прикладных исследованиях, -знать алгоритмы нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, - уметь находить наибольшее и наименьшее значение функции.	СР	

**Тематический план элективного курса**

№ п/п	Наименование темы	Кол-во часов	Из них	
			Теорети- ческих занятий	Практи- ческих занятий
<b>Часть I. Замечательные неравенства (13 часов)</b>				
1	Числовые неравенства и их свойства.	1	1	
2	Основные методы установления истинности числовых неравенств.	1	1	
3	Основные методы установления истинности числовых неравенств.	1		1
4	Основные методы решения задач на установление истинности неравенств с переменными. Частные случаи неравенства Коши, их обоснование и применение.	1	1	
5	Основные методы решения задач на установление истинности неравенств с переменными. Частные случаи неравенства Коши, их обоснование и применение.	1		1
6	Основные методы решения задач на установление истинности неравенств с переменными. Частные случаи неравенства Коши, их обоснование и применение.	1		1
7	Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств. Неравенство Коши для произвольного числа переменных.	1	1	
8	Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств. Неравенство Коши для произвольного числа переменных.	1	1	
9	Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств. Неравенство Коши для произвольного числа переменных.	1		1
10	Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств. Неравенство Коши для произвольного числа переменных.	1		1
11	Неравенство Коши – Буняковского и его применение к решению задач.	1	1	
12	Неравенство Коши – Буняковского и его применение к решению задач.	1		1
13	Неравенства подсказывают методы их обоснования.	1		1
<b>Часть II. Средние величины, их свойства и применение (21 час)</b>				
14	Средние арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратическое и соотношения между ними в случае двух параметров.	1		1
15	Геометрические интерпретации.	1		1
16	Среднее арифметико-геометрическое Гаусса и среднее арифметико-гармоническое	1	1	
17	Симметрические средние. Круговые неравенства.	1		1

18	Среднее арифметическое взвешенное и его свойства.	1	1		
19	Средние степенные и средние взвешенные степенные.	1	1		
20	Средние степенные и средние взвешенные степенные.	1		1	
21	Неравенство Чебышева.	1	1		
22	Обобщающие неравенства.	1	1		
23	Свойства квадратичной функции; геометрические модели.	1	1		
24	Свойства квадратичной функции; геометрические модели.	1		1	
25	Свойства одномонотонных последовательностей.	1	1		
26	Свойства одномонотонных последовательностей.	1		1	
27	Свойства одномонотонных последовательностей.	1		1	
28	Неравенство Йенсона.	1	1		
29	Неравенство Йенсона.	1		1	
30	Исследование функции на выпуклость и вогнутость.	1	1		
31	Неравенства Коши-Гельдера и Минковского.	1	1		
32	Неравенства в математической статистике и экономике. Задачи на оптимизацию	1	1		
33	Неравенства в математической статистике и экономике. Задачи на оптимизацию.	1		1	
34	Заключительное занятие.	1		1	
		Итого	34	17	17